מטלת מנחה 12

## שאלה 1

יהיו ,

### סעיף א

### סעיף ב

### סעיף ג

הקבוצה , שכן רק הקבוצה הריקה חלקית לקבוצה הריקה.

קבוצת החזקה של הקבוצה , היא . הקבוצה הריקה חלקית לכל קבוצה, וכל קבוצה חלקית לעצמה.

ההתאמות הקיימות האפשריות בין שתי הקבוצות הן:

* ההתאמה הריקה, שע"פ הגדרה אינה חח"ע
* התאמת ל.  
  במקרה זה לאיבר לא מותאם אף איבר, או מתאים גם לו האיבר . ולכן בכל מקרה ההתאמה אינה חח"ע.
* התאמת ל.  
  במקרה זה לאיבר לא מותאם אף איבר, או מתאים גם לו האיבר ולכן בכל מקרה ההתאמה אינה חח"ע.

לא קיימת התאמה חח"ע בין שתי הקבוצות ולכן הן אינן שקולות זו לזו.

## שאלה 2

### סעיף א

הטענה: לכל 3 קבוצות מתקיים .

טענת עזר א: לכל 3 קבוצות מתקיים .

הוכחת טענת עזר א: נניח בשלילה .

לכן קיים :

וגם : וגם

ובפרט וגם

: או

ובפרט כי .

: ( או )

ובפרט כי .

או , אבל וגם !

טענת עזר ב: לכל 3 קבוצות מתקיים .

הוכחת טענת עזר ב: נניח בשלילה

לכן קיים :

וגם :

וגם

וגם וגם וגם .

:

או .

( או )

ובפרט כי .

או , אבל וגם !

הוכחת הטענה:

לפי טענות העזר, וגם

לכן .

### 

### סעיף ב

טענה: אם , אז .

הוכחה: נניח בשלילה

לכן קיים

וגם :

וגם

וגם

: או

:

הוכחתי בסעיף א לה"כ

וגם

לפי ההנחה, אבל !

### סעיף ג

טענה: אם , אז .

טענת עזר א: אם , אז .

הוכחת טענת עזר א:

יהי .

לפי ההנחה וגם

וגם

לכן .

טענת עזר ב: אם , אז .

הוכחת טענת עזר ב: נניח בשלילה

לכן קיים : .

וגם וגם

לפי ההנחה, אבל !

הוכחת הטענה:

לפי ההנחה, ( וגם )

לכן ע"פ טענות העזר וגם .

ולכן .

## שאלה 3

### סעיף א

תהי הקבוצה A בעלת שני איברים לפחות

הגדרת הפעולה: לכל מתקיים .

טענה: סגורה

הוכחה:

יהיו איברים כלשהם בA.

לפי הגדרה,

מתקיים גם ולכן A סגורה ביחס לפעולה .

טענה: חילופית

הפרכה:

נניח בשלילה חילופית

לכן לכל מתקיים

לפי ההנחה לכל

בקבוצה A איבר אחד אבל בקבוצה A שני איברים לפחות!

הוכחת קיבוציות:

יהיו איברים כלשהם בA.

לפי הגדרה, וגם .

לכן .

בנוסף, הקבוצה A סגורה ביחס לפעולה ולכן הפעולה קיבוצית על A.

הפרכת קיום איבר ניטרלי

נניח בשלילה כי קיים איבר ניטרלי .

לכן לכל מתקיים וגם

לפי ההנחה, אבל !

### 

### סעיף ב

נתונה A קבוצה שאינה ריקה.

ומוגדרת על קבוצת החזקה שלה, , פעולה בינארית כך שלכל מתקיים .

טענה: סגורה

הוכחה:

יהיו

לכן

: יהי או או

לכן

ולכן

טענה: חילופית

הוכחה:

יהיו

ע"פ הגדרה וגם

לפי חלופיות איחוד קבוצות

טענה: קיבוצית

הוכחת קיבוציות

יהיו

ע"פ הגדרה, .

לפי קיבוציות איחוד קבוצות

בנוסף לפי הוכחות קודמות סגורה קיבוצית

טענה: קיום ניטרלי ב

הוכחה:

כי הקבוצה הריקה חלקית לכל קבוצה.

יהי

לפי ההנחה וגם

ולכן ניטרלי ביחס ל